Тема 5

https://github.com/v--/se2018

Теореми за средните стойности (Рол, Лагранж и Коши). Формула на Тейлър.

Янис Василев

Оригинал: 6 юли 2019
Ревизия: `9c26f56` от 04 ноември 2024
За всеки случай проверете дали няма по-нова ревизия

1. Теория

Доказателството на теоремата на Тейлър е заимствано от Фихтенгольц, *Основы математического анализа*.

1.1. Анотация

Изложената анотацията е взета от *Конспект за ДИ за спец. статистика*.

1. Теоремата на Рол с доказателство, базирано на теоремата на Вайерщрас.
2. Теоремите за средните стойности на Лагранж и Коши.
3. Формула на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж и Коши.

1.2. Помощни теореми

Определение 1. Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ е произволно множество и $f : D \to \mathbb{R}$ е произволна функция.

1. Казваме, че функцията $f(x)$ има **локален максимум** в точка $a \in D$, ако за някаква околност U_a на a е изпълнено $f(a) \geq f(u) \quad \forall u \in U_a$.
2. Казваме, че функцията $f(x)$ има **локален минимум** в точка $a \in D$, ако за някаква околност U_a на a е изпълнено $f(a) \leq f(u) \quad \forall u \in U_a$.
3. Ако $f(x)$ има или локален максимум, или локален минимум в точка a, казваме, че $f(x)$ има **локален екстремум** в тока a.

Теорема 2 (Вайерщрас). *Нека $a < b$ и функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната. Тогава $f(x)$ има минимум и максимум в $[a, b]$.*

Доказателство. Понеже $f(x)$ е непрекъсната и интервалът $[a, b]$ е ограничено множество, образът $f([a, b])$ също е ограничено множество. Всяко ограничено множество от реални числа има супремум и инфимум.

Нека $M := \sup_{x \in [a,b]} f(x)$. Тогава съществува редица $\{a_k\} \subseteq [a, b]$, за която съответната редица от функционални стойности $\{f(a_k)\}$ клони към M.

Тъй като интервалът $[a, b]$ е ограничен, редицата също $\{a_k\}$ е ограничена и според теоремата на Болцано-Вайерщрас, тя има сходяща подредица.

Нека $\{a_{k_i}\}$ е една сходяща подредица на $\{a_k\}$. Тъй като интервалът $[a, b]$ е затворен, границата α на редицата $\{a_{k_i}\}$ лежи в този интервал.

Понеже $f(x)$ е непрекъсната, имаме

$$\lim_{i \to \infty} f(a_{k_i}) = f(\alpha) = M,$$

където последното равенство получихме от еднозначността на сходимостта на редици. □

Теорема 3 (Ферма). *Нека $D \subseteq \mathbb{R}$ и функцията $f : D \to \mathbb{R}$ е диференцируема в точката $a \in D$. Необходимо условия за това $f(x)$ да има локален екстремум в a е производната $f'(a)$ да се анулира.*

Доказателство. Ще използваме това, че след като $f(x)$ е диференцируема, то лявата и дясната производна на $f(x)$ съвпадат. Ако $f(x)$ да има локален минимум в a. Тогава

$$f'(a) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \geq 0,$$

тъй като $f(a + h) \geq f(a)$ за достатъчно малко $h > 0$. Обратно,

$$f'(a) = \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \leq 0,$$

тъй като $f(a + h) \geq f(a)$ за достатъчно малко по абсолютна стойност $h < 0$.

Заключаваме, че $f'(a) = 0$. □

1.3. Теореми за средните стойности

Теорема 4 (Рол). *Нека $a < b$, а функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Ако $f(a) = f(b)$, съществува точка $c \in (a, b)$, такава че $f'(c) = 0$.*

Доказателство. Разглеждаме три случая:

1. Нека $f(x) \equiv f(a)$ е тъждествено константа. Тогава избираме c да бъде произволна точка от (a, b), тъй като $f'(x) = 0$ за всяко $x \in [a, b]$.

2. Нека $f(x) > f(a)$ за някое x. Според теоремата на Вайерщрас, функцията $f(x)$ достига своя максимум M_f в интервала $[a, b]$ и според допускането ни имаме $M_f > f(a)$. При това този максимум се достига непременно във вътрешността на интервала. Нека $c \in (a, b)$ е точка, за която $f(c) = M_f$. Тъй като M_f е локален максимум, по теоремата на Ферма имаме $f'(c) = 0$.

3. Нека $f(x)$ не е тъждествено константа и $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in [a, b]$. Тогава прилагаме вече доказания случай към функцията $-f(x)$ и получаваме константа $c \in (a, b)$, за която $f'(c) = -f'(c) = 0$.

□

Теорема 5 (Теорема на Лагранж за крайните нараствания). *Нека $a < b$, а функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в $[a, b]$ и диференцируема в (a, b). Тогава съществува точка $c \in (a, b)$, такава че*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказателство. Разглеждаме спомагателната функция

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x,$$

за която имаме

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{b - a} = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} b = g(b).$$

Освен това $g(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ като сума на непрекъснати в $[a, b]$ функции и диференцируема в (a, b) като сума на диференцируеми в (a, b) функции. Това ни позволява да приложим теоремата на Рол към $g(x)$, за да получим константа c, за която

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Но тогава

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Теорема 6 (Теорема на Коши). *Нека $a < b$, а функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ са непрекъснати в $[a, b]$ и диференцируеми в (a, b) и нека $g'(x) \neq 0$ за $x \in (a, b)$. Тогава съществува точка $c \in (a, b)$, такава че*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Доказателство. Да отбележим първо, че $g'(x) \neq 0$ в (a, b) влече, че условията на теоремата на Рол не са изпълнена за $g(x)$ и следователно $g(a) \neq g(b)$.

Разглеждаме спомагателната функция

$$h(x) \coloneqq f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x),$$

за която имаме

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a) = \\ &= \frac{f(a) \cdot g(b) - f(b) \cdot g(a)}{g(b) - g(a)} = \\ &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b) = h(b). \end{aligned}$$

Функцията $h(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$ като линейна комбинация на непрекъснати в $[a, b]$ функции и диференцируема в (a, b) като линейна комбинация на диференцируеми в (a, b) функции. Това ни позволява да приложим теоремата на Рол към $h(x)$, за да получим константа c, за която

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c).$$

Но тогава

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

1.4. Теорема на Тейлър

Теорема 7 (Тейлър). *Нека $a < b$, а функцията $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в $[a, b]$ и $n+1$-кратно диференцируема в (a, b). Тогава за произволна точка $\xi \in (a, b)$ в достатъчно малка околност на ξ е изпълнено*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} (x - \xi)^k + R(x),$$

където $R(x) \xrightarrow[x \to \xi]{} 0$.

Доказателство. Фиксираме $\xi, x \in (a, b)$ и полагаме $U \coloneqq [\min(\xi, x), \max(\xi, x)]$. Дефинираме спомагателната функция

$$\varphi(t) \coloneqq f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k.$$

Тази функция обобщава остатъчния член, тъй като $\varphi(\xi) = R(x)$. За производната ѝ имаме

$$\varphi'(t) = f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x - t)^{k-1} \right) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n.$$

За да изразим остатъчният член в различни форми, използваме още една спомагателна функция. Нека $\psi : U \to \mathbb{R}$ е непрекъсната в U и диференцируема във вътрешността $\operatorname{int} U$. Нека освен това производната $\psi'(t)$ да бъде различна от 0 в интервала $\operatorname{int} U$.

От теоремата на Коши намираме константа $c \in \operatorname{int} U$, така че

$$\frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(\xi)}{\psi(x) - \psi(\xi)}.$$

Понеже $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(\xi) = R(x)$, за остатъчния член имаме

$$R(x) = -\frac{\psi(x) - \psi(\xi)}{\psi'(c)} \varphi'(c) = \frac{\psi(x) - \psi(\xi)}{\psi'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n.$$

От непрекъснатостта на $\psi(t)$ следва, че $R(x) \xrightarrow[x \to \xi]{} 0$. $\square$

В зависимост от конкретния вид на функцията $\psi(t)$, можем да получим различни форми за остатъчните членове:

1. Казваме, че остатъчният член е във **форма на Лагранж**, ако $\psi(t) = (x-t)^{n+1}$.

   В такъв случай имаме $\psi(x) = 0$, $\psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$ и

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\psi(x) - \psi(\xi)}{\psi'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n = \\ &= \frac{-(x-\xi)^{n+1}}{-(n+1)(x-c)^n} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n = \\ &= \boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-\xi)^{n+1}}. \end{aligned}$$

2. Казваме, че остатъчният член е във **форма на Коши**, ако $\psi(t) = x - t$.

   В такъв случай имаме $\psi(x) = 0$, $\psi'(t) = -1$ и

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{\psi(x) - \psi(\xi)}{\psi'(c)} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n = \\ &= \frac{-(x-\xi)}{-1} \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n = \\ &= \boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n (x-\xi)}. \end{aligned}$$

2. Задачи

Условията на представените задачи са взети от *Конспект за ДИ за спец. статистика*.

Задача 1. *Нека $f(t) = a(1-t)\cos(at) - \sin(at)$, където a е произволно фиксирано реално число. Като се използва теоремата на Рол, да се докаже, че уравнението $f(t) = 0$ има поне един реален корен в интервала $(0, 1)$.*

Решение. Намираме примитивна на $f(t)$ функция

$$
\begin{aligned}
F(t) = \int_0^t f(x)dx = \\
&= a\int_0^t (1-x)\cos(ax)dx - \int_0^t \sin(ax)dx = \\
&= \int_0^t (1-x)d(\sin(ax)) - \int_0^t \sin(ax)dx = \\
&= (1-t)\sin(at) - \int_0^t \sin(ax)d(1-x) - \int_0^t \sin(ax)dx = \\
&= (1-t)\sin(at) + \int_0^t \sin(ax)dx - \int_0^t \sin(ax)dx = \\
&= (1-t)\sin(at).
\end{aligned}
$$

Стойностите на функцията $F(t)$ в краищата на интервала $[0,1]$ се анулират. Тогава теоремата на Рол ни дава константа $c \in (0,1)$, за която

$$F'(c) = f(c) = 0.$$

Следователно $c \in (0,1)$ е корен на уравнението $f(t) = 0$. □

3. Литература

Конспект за ДИ за спец. статистика. 2018. URL: https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/KOTdUnmqbrndOsX (дата на посещ. 24.03.2019).

Фихтенгольц, Григорий Михайлович. *Основы математического анализа*. Рус. 6-е изд. Т. 2. Наука, 1968.